Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros

Vicente Meavilla Segui

Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros

ALMUZARA

2010

1ª edición: marzo de 2010

Colección Mathemática
Editorial Almuzara
Director editorial: Antonio E. Cuesta López
www.editorialalmuzara.com
pedidos@editorialalmuzara.com - info@editorialalmuzara.com

Imprime: Gráficas La Paz

I.S.B.N.: 978-84-92924-13-4
Depósito Legal: CO-149-10
Hecho e impreso en España - *Made and printed in Spain.*

A Paqui, mi esposa, de quien
aprendo todos los días

Índice

Prólogo

En la enseñanza de las Matemáticas se suele prestar poca atención a los textos originales escritos por los grandes maestros. En la mayoría de las ocasiones se presentan a los estudiantes conceptos y procedimientos que poco o nada tienen que ver con los documentos primigenios. Suelen ser productos de segunda mano que han perdido gran parte del sabor de los guisos originales.

Estamos convencidos, por propia experiencia, de que la lectura de los textos originales es una fuente inagotable de ideas. Además, el contacto con la obra de aquellos personajes que contribuyeron al progreso de la Humanidad, permite apreciar la evolución de la Matemática y percibirla como un producto que es susceptible de cambios y mejoras.

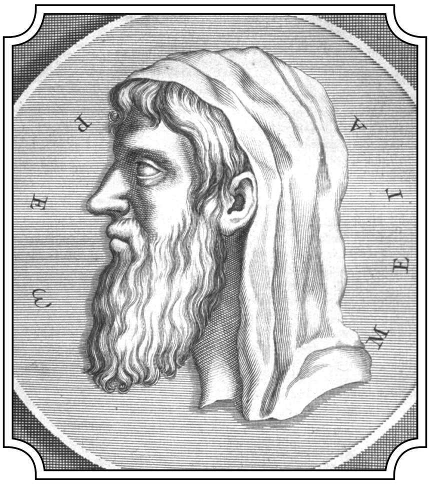
Por otro lado, estimamos que los departamentos universitarios, implicados en la didáctica, deberían acometer la traducción de los textos matemáticos clásicos más significativos y ponerlos al alcance de un colectivo preocupado y ocupado en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Para mostrar la utilidad que pueden tener los trabajos originales de los grandes matemáticos, hemos escrito este libro. Por sus páginas desfilan textos consagrados a diversos tópicos (Teorema de Pitágoras, triples pitagóricos, ecuaciones de segundo grado, área del círculo, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, volumen de la pirámide, problemas de primer y segundo grado, progresiones aritméticas y geométricas, regla de Cramer, triángulo aritmético, integración, regla de L'Hôpital, probabilidad, derivación de funciones de una variable, resolución geométrica de ecuaciones), escritos por científicos tan ilustres como Euclides, Savasorda, Fibonacci, Stevin, Descartes, Fermat, Pascal, Newton, L´Hôpital, Saunderson, Maclaurin, Euler, Simpson, Clairaut, Agnesi, Laplace, Cauchy, Briot, Bouquet y Rouché.

Hemos estructurado el material en diecinueve lecciones, ordenadas cronológicamente atendiendo a la fecha de nacimiento de los profesores. Cada lección va precedida de una breve biografía del autor o autores, y puede contener actividades de enseñanza y aprendizaje, comentarios y valoraciones didácticas.

Esperamos que la lectura de este modesto trabajo despierte el interés por el estudio de la historia de las Matemáticas acudiendo a las fuentes. Sin duda alguna, esta forma de aprendizaje no está exenta de dificultades, pero, créanme, aprender de los grandes maestros compensa cualquier esfuerzo.

Teruel, 5 de abril de 2007



Aprendiendo de Euclides

Los detalles que se conocen sobre la vida de Euclides de Alejandría son escasos. La mayor parte de ellos están contenidos en un pasaje de Proclo (410-485 d. C.) en el que se nos transmite la siguiente información:

Euclides vivió durante el reinado de Ptolomeo I (306-283 a. C.), siendo *más joven que los discípulos de Platón, pero mayor que Eratóstenes y Arquímedes.* Atendiendo a estos datos, lo único que se puede asegurar es que Euclides debió florecer hacia el año 300 a. C.

En el mismo fragmento se cuenta una anécdota en la que se dice que el rey Ptolomeo preguntó a Euclides si en la enseñanza de la geometría había un camino más corto que el seguido por nuestro biografiado. Euclides respondió: «En geometría no hay un camino especial para los reyes».

Stobeo refiere otra historia en la que se pone de manifiesto una faceta relacionada con la labor pedagógica de Euclides. Un alumno que había empezado a estudiar geometría con él, cuando comprendió el primer teorema, le preguntó: «¿Qué ganaré aprendiendo estas cosas?».

Euclides, llamando a su esclavo, dijo: «Dale tres monedas, puesto que debe ganar de lo que aprende».

Atendiendo a un fragmento de Pappus, resulta claro que Euclides enseñó geometría y fundó una escuela de Matemáticas en Alejandría (Egipto).

Fue tal la importancia de Euclides en el campo de la geometría que algunos filólogos árabes sostuvieron que su nombre era una degeneración de "*ucli*" [= llave] y "*dis*" [= medida o geometría]. En otras palabras, Euclides era sinónimo de llave de la geometría.

La obra capital de Euclides es la titulada *Stoixeia* [= Elementos], estructurada en trece capítulos o libros. A lo largo de estas trece secciones se ofrece una visión bastante completa de la matemática (geometría, teoría de números y álgebra geométrica) desarrollada por los investigadores griegos anteriores a Euclides.

El matemático Howard Eves, refiriéndose a los *Elementos*, se expresa en los siguientes términos:

Ningún otro trabajo, excepto la Biblia, se ha utilizado, editado o estudiado más ampliamente. Por más de dos milenios ha dominado toda la enseñanza de la geometría y se han publicado más de mil ediciones de él desde la primera impresión en 1482.

Teorema de Pitágoras

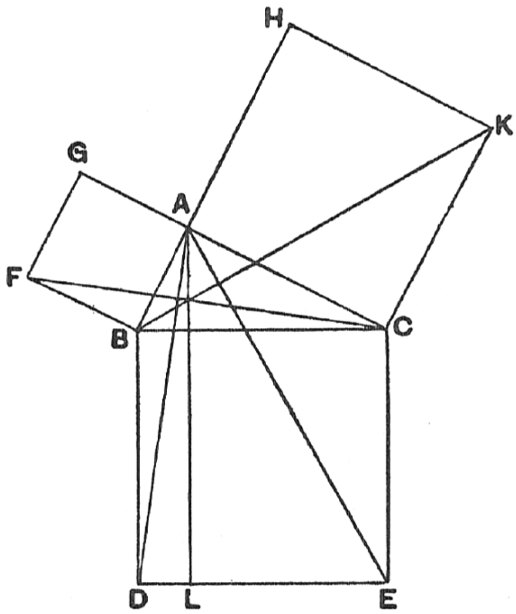
(*Elementos.* Libro I, prop. 47)

En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.
Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo BAC es recto.
Digo que el cuadrado sobre BC es equivalente a los cuadrados sobre BA y AC.

Descríbase sobre BC el cuadrado BDEC y sobre BA y AC los cuadrados GB y HC, respectivamente[1].

Desde A trácese AL paralela a BD y CE y únanse A con D y C con F.

Entonces, dado que cada uno de los ángulos BAC y BAG son rectos, se sigue que sobre la recta BA y en su punto A las dos rectas AC y AG, no situadas en el mismo lado, forman ángulos contiguos que, juntos, son iguales a dos rectos. Por tanto, CA y AG están sobre la misma recta.



1 Euclides se refiere a los cuadrados GFBA y HACK.

Del mismo modo, BA y AH están sobre la misma recta. Como el ángulo DBC es igual al FBA, dado que los dos son rectos, añádase a cada uno de ellos el ángulo ABC y entonces el ángulo DBA es igual al ángulo FBC.

Y, puesto que DB es igual a BC y FB igual a BA, los dos lados AB, BD son iguales a los dos lados FB, BC, respectivamente, y el ángulo ABD es igual al ángulo FBC. Por tanto, la base AD es igual a la base FC, y el triángulo ABD es igual al triángulo FBC.

Ahora bien, el paralelogramo BL es doble del triángulo ABD puesto que tienen la misma base BD y están comprendidos entre las mismas paralelas BD y AL. Y el cuadrado GB es doble del triángulo FBC, dado que tienen la misma base FB y están entre las mismas paralelas FB y GC. Por tanto, el paralelogramo BL es equivalente al cuadrado GB.

De modo similar, si se unen A con E y B con K, se demuestra que el paralelogramo CL es equivalente al cuadrado HC.

En consecuencia, el cuadrado BDEC es equivalente a los cuadrados GB y HC.

El cuadrado BDEC está descrito sobre BC y los cuadrados GB y HC sobre BA y AC.

Por tanto: el cuadrado sobre el lado BC es equivalente a los cuadrados sobre los lados BA y AC.

Consideraciones didácticas

La demostración anterior se comprende sin dificultad alguna con la ayuda de unos pocos conocimientos de geometría elemental (suma de ángulos, criterios de igualdad de triángulos, segmentos de paralelas comprendidos entre rectas paralelas, área del rectángulo, área del triángulo).

Por ello, consideramos que una adaptación de tal demostración se podría proponer a los alumnos del segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria o del primer curso de Bachillerato.

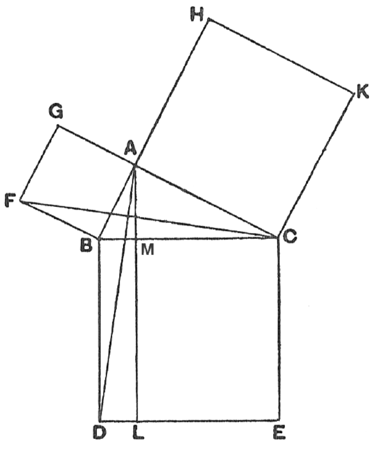
El teorema de Pitágoras: una actividad de enseñanza y aprendizaje para alumnos de Secundaria

1. El teorema

A lo largo de esta actividad vas a demostrar la siguiente proposición, conocida universalmente como Teorema de Pitágoras:

En cualquier triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Para ello te puedes ayudar de la figura siguiente en la que ABC es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es BC.



2. La demostración: primera etapa

Desde el punto A traza la paralela AL a BD y CE.

Dibuja también los segmentos rectilíneos FC y AD.

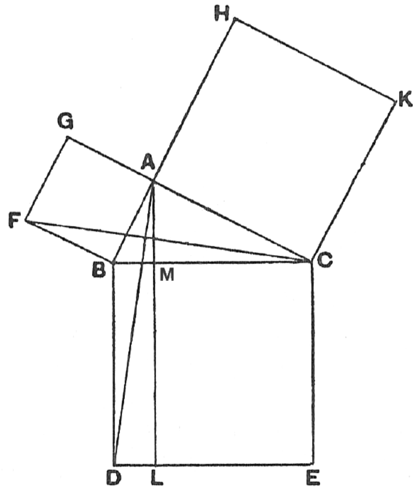
Compara las amplitudes de los ángulos ∠ FBC y ∠ ABD.

Compara las longitudes de los segmentos rectilíneos FB y BA.

Compara las longitudes de los segmentos rectilíneos BC y BD.

Compara los triángulos FBC y ABD.

Razona tus respuestas.

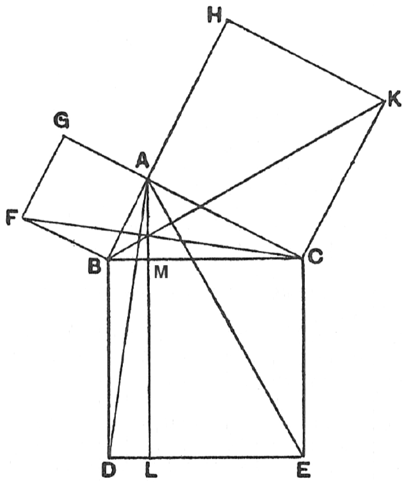


3. La demostración: segunda etapa

Compara las áreas de los triángulos FBC y ABD.
Compara el área del triángulo FBC con el área del cuadrado GFBA.
Compara el área del triángulo ABD con la del rectángulo BDLM.
Compara el área del rectángulo anterior con la del cuadrado GFBA.
Razona tus respuestas.

4. La demostración: tercera etapa

Dibuja los segmentos rectilíneos AE y BK.
Compara las amplitudes de los ángulos $\angle$ ACE y $\angle$ BCK.
Compara las longitudes de los segmentos rectilíneos AC y KC.
Compara las longitudes de los segmentos rectilíneos CE y CB.
Compara los triángulos ACE y KCB.
Razona tus respuestas.



5. La demostración: cuarta etapa

Compara las áreas de los triángulos ACE y KCB.
Compara el área del triángulo ACE con el área del rectángulo MCEL.
Compara el área del triángulo KCB con la del cuadrado AHKC.
Compara el área del cuadrado anterior con la del rectángulo MCEL.
Razona tus respuestas.

6. La demostración: quinta y última etapa

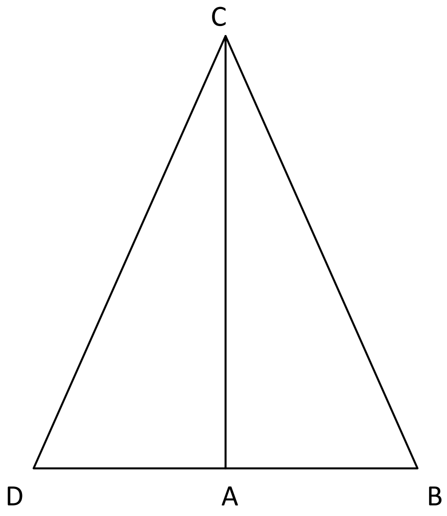
En la segunda y quinta etapa de la demostración que está a punto de concluir, has probado, respectivamente, que: (i) el área del cuadrado ABFG es igual a la del rectángulo BMLD y (ii) el área del cuadrado AHKC es igual a la del rectángulo MCEL.
A partir de estos resultados, deduce que:

$$\text{Área}_{\,ABFG} + \text{Área}_{\,AHKC} = \text{Área}_{\,BCED}$$

Recíproco del teorema de Pitágoras

(*Elementos*. Libro I, prop. 48)

Si en un triángulo, el cuadrado sobre uno de sus lados es equivalente a los cuadrados sobre los otros dos lados del triángulo, entonces el ángulo comprendido por estos dos lados es recto.
Si en el triángulo ABC el cuadrado sobre BC es equivalente a los cuadrados sobre los lados BA y AC, entonces digo que el ángulo BAC es recto.



Desde el punto A, dibújese AD perpendicular a AC y tómese AD igual a AB. Unánse también los puntos D y C.

Como DA es igual a AB, el cuadrdo sobre DA es igual al cuadrado sobre AB. Añádase el cuadrado sobre AC. Entonces, los cuadrados sobre DA y AC son equivalentes a los cuadrados sobre BA y AC.

Pero el cuadrado sobre DC es equivalente a los cuadrados sobre DA y AC, dado que el ángulo DAC es recto, y el cuadrado sobre BC es equivalente a los cuadrados sobre BA y AC, por hipótesis.

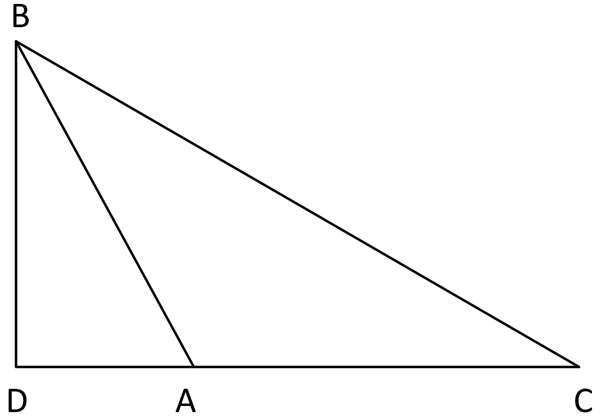
Por tanto, el cuadrado sobre DC es equivalente al cuadrado sobre BC y el lado DC será, por tanto, igual al BC.

Y como DA es igual a AB, y AC es común, los dos lados DA y AC son iguales a los lados BA y AC, y la base DC igual a la base BC. Entonces, el ángulo DAC es igual al ángulo BAC. Como el ángulo DAC es recto, entonces el ángulo BAC también es recto.

Generalización del teorema de Pitágoras para los triángulos obtusángulos

(*Elementos.* Libro II, prop. 12)

En los triángulos obtusángulos, el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que comprenden dicho ángulo en el doble del rectángulo comprendido por el lado del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y por la recta exterior comprendida entre la perpendicular y el ángulo obtuso.



Sea ABC un triángulo obtusángulo cuyo ángulo obtuso es el BAC y trácese desde B la perpendicular BD a la prolongación de CA. Digo que el cuadrado sobre BC es mayor que los cuadrados sobre BA y AC en el doble del rectángulo comprendido por CA y AD.

Dado que la recta CD está dividida por el punto A, entonces el cuadrado de DC es igual a los cuadrados sobre CA y AD más el doble del rectángulo comprendido por CA y AD[2].

Añádase el cuadrado sobre DB, y entonces los cuadrados sobre

2 Euclides aplica la proposición 4 del libro II, cuya traducción al simbolismo algebraico moderno es: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

CD y DB son iguales a los cuadrados sobre CA, AD, DB y dos veces el rectángulo CA, AD[3].

Pero el cuadrado sobre CB es igual a los cuadrados sobre CD y DB, dado que el ángulo en D es recto[4] y el cuadrado sobre AB es igual a los cuadrados sobre AD y DB[5].

Por tanto, el cuadrado sobre CB es igual a los cuadrados sobre CA y AB más dos veces el rectángulo comprendido por CA y AD[6].

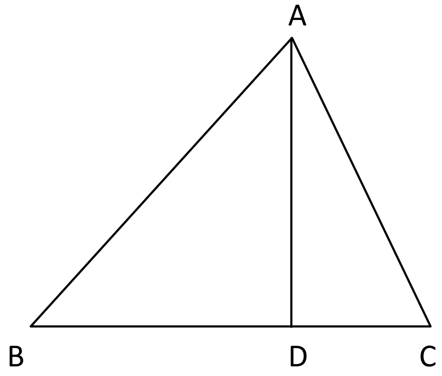
En consecuencia, el cuadrado sobre CB es mayor que los cuadrados sobre CA y AB en el doble del rectángulo comprendido por CA y AD.

Generalización del teorema de Pitágoras para los triángulos acutángulos

(*Elementos.* Libro II, prop. 13)

En los triángulos acutángulos, el cuadrado sobre el lado que subtiende un ángulo agudo es menor que los cuadrados sobre los lados que comprenden dicho ángulo en el doble del rectángulo comprendido por el lado del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y por la recta interior comprendida entre la perpendicular y el ángulo agudo.

Sea ABC un triángulo acutángulo y B uno de sus ángulos agudos. Dibújese, desde A, la perpendicular AD a BC.



3 Es decir: $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2CA \cdot AD$

4 En virtud del teorema de Pitágoras se tiene que: $CB^2 = CD^2 + DB^2$

5 En virtud del teorema de Pitágoras se tiene que: $AB^2 = AD^2 + DB^2$

6 $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2CA \cdot AD \Rightarrow CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2CA \cdot AD$

Dado que la recta CB está dividida por el punto D, entonces los cuadrados sobre CB y BD son iguales al doble del rectángulo comprendido por CB y BD más el cuadrado sobre DC[7].

Añádase el cuadrado sobre DA, y entonces los cuadrados sobre CB, BD y DA son iguales al doble del rectángulo comprendido por CB y BD más los cuadrados sobre AD y DC[8].

Pero el cuadrado sobre AB es igual a los cuadrados sobre BD y DA, puesto que el ángulo en D es recto[9] y el cuadrado sobre AC es igual a los cuadrados sobre AD y DC[10].

Por tanto, los cuadrados sobre CB y BA son iguales al cuadrado sobre AC más el doble del rectángulo comprendido por CB y BD[11].

En consecuencia, el cuadrado sobre AC es menor que los cuadrados sobre CB y BA en el doble del rectángulo comprendido por CB y BD.

Aspectos didácticos

Resulta obvio que tanto el teorema de Pitágoras como los dos últimos que acabamos de considerar son casos particulares del conocido “teorema de los cosenos” en el que se nos asegura que:

En cualquier triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Por tanto, podría ser didácticamente recomendable presentar a nuestros alumnos del primer curso de Bachillerato las demostraciones euclídeas de los antedichas proposiciones para que aprecien la economía de pensamiento que supone su generalización en un único teorema trigonométrico.

7 Euclides aplica la proposición 7 del libro II, cuya traducción al simbolismo algebraico moderno es: $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$

8 $CB^2 + BD^2 = 2CB \cdot BD + DC^2 \Rightarrow CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2CB \cdot BD + AD^2 + DC^2$

9 En virtud del teorema de Pitágoras se tiene que: $AB^2 = BD^2 + DA^2$

10 En virtud del teorema de Pitágoras se tiene que: $AC^2 = AD^2 + DC^2$

11 $CB^2 + BD^2 + DA^2 = 2CB \cdot BD + AD^2 + DC^2 \Rightarrow CB^2 + AB^2 = AC^2 + 2CB \cdot BD$